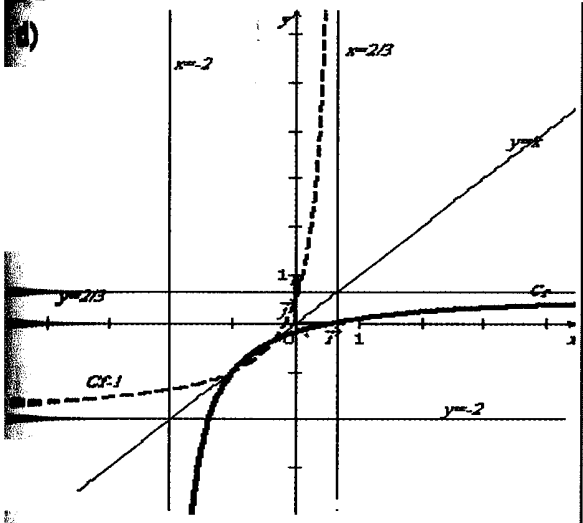
d)



Exercice n° 6

$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

a) $x \to x^2$ est dérivable sur IR

$x \to 1+x^2$ est dérivable sur IR: et $1+x^2>0$

Donc f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x)=\frac{2x(1+x^2)-2x\,x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in$ IR

b) Tableau des variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

a) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'où g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)=]0,1[=J$

b)) $x \in]0,1[$, $y \in]0,+\infty[$

$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$, cherchons donc y :

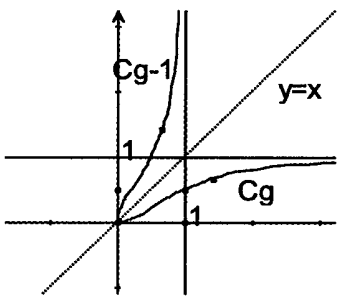
$$\frac{y^2}{1+y^2}=x \Leftrightarrow y^2=(1+y^2).x$$

$$\Leftrightarrow y^2=x+x.y^2.$$

$$\Leftrightarrow y^2(1-x)=x \Leftrightarrow y^2=\frac{x}{1-x} \text{ comme } y>0$$

Alors $\boxed{g^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$

c) Courbe de g et sa réciproque



Exercice n° 7

$f(x)=\dfrac{2}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$

a) f est dérivable sur $]0,\pi[$ car sin(x) $\neq 0$ et on a

$f'(x)=-\dfrac{2\cos x}{(\sin x)^2}$, le signe de $f'(x)$ est le contraire de celui de cos(x)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{0^+}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \pi^-}\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

g restriction de f à $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où g réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]2,+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque définie sur $]2,+\infty[$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn